



Matemática I – Semestre 2 - 2023/2024

EXAME MODELO

Duração: $(120 + \varepsilon)$ minutos, $|\varepsilon| \leq 30$

Parte I

- Complete os seguintes espaços de forma a obter proposições verdadeiras. As alíneas são todas independentes.
 - Não precisa de justificar as suas respostas.
-

(a) Relativamente ao conjunto $A = [0, 2] \cup [3, 5]$, pode-se concluir que:

1. $\text{ad}(A) = \dots\dots\dots$ e $\text{fr}(A) = \dots\dots\dots$
2. $\text{inf}(A) = \dots\dots\dots$
3. Uma vez que A é $\dots\dots\dots$ e limitado, conclui-se que A é compacto.

(b) Seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$ e segundo termo 2. Logo

$$v_1 = \dots\dots\dots \text{ e } \sum_{n=5}^{\infty} v_n = \dots\dots\dots$$

(c) Considere a função $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - \frac{3}{x+2}$, onde $D_f \subset \mathbb{R}$ representa o domínio maximal de f . Então:

1. $D_f = \dots\dots\dots$;
2. $f(0) = \dots\dots\dots$, $f(\dots) = 0$;
3. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

- (d) Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^{x+2} - 1}{x}$. Então

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{\sin(\pi x)} = \dots\dots\dots$$

- (e) A equação $e^x = \tan(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo aberto

- (f) Seja f a função definida por $f(x) = 2 - \sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$. O polinómio de Taylor de f de grau 3 em $x_0 = 0$ é:

$$P_0^3(x) = \dots\dots\dots$$

- (g) Relativamente a uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável (pelo menos duas vezes), sabe-se que:

$$f'(-3) = 0 \quad \text{e} \quad f''(-3) < 0.$$

Logo, conclui-se que:

- f atinge um local em $x = -3$;
- f tem máximo e mínimo absolutos no intervalo, como consequência do Teorema de

- (h) A região compreendida entre o gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ e o eixo dos xx tem área igual a

- (i) Considere a função F , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{t^2 + 2} dt.$$

Então $F'(x) = \dots\dots\dots$, como consequência do Teorema
do

(j) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $\bar{u}$, $\bar{v}$ e $\bar{w}$ definidos por:

$$\bar{u} = (-1, 2, -3), \quad \bar{v} = \left(2, \frac{1}{3}, -1\right) \quad \bar{w} = (-3, 6, 0).$$

Então:

- $2\bar{u} - 3\bar{v} = (\dots, \dots, \dots)$,
- $\bar{u} \cdot \bar{v} = \dots$ e $\|3\bar{v} + \bar{w}\|^2 = \dots$
- os vetores $\bar{u}$ e $\bar{w}$ são linearmente

(k) Considere, em $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Então pode-se afirmar que:

- uma vez que $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, a matriz $\mathbf{A}$ diz-se
- $\det(\mathbf{A}) = \dots$ e $\det(4\mathbf{A}^T)^{-1} = \dots$
- $r(\mathbf{A}^T) = \dots$

(l) Relativamente ao sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^5$, $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{5 \times 1}(\mathbb{R})$, sabe-se que:

- $r(\mathbf{A}) = 4$ e
- o sistema $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ é impossível.

Logo, $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \dots$

Parte II

Nas questões que se seguem, apresente justificações completas e sucintas.

1. Considere a seguinte função f , definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, por $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$.
- (a) Encontre os pontos críticos de f .
 - (b) Identifique os intervalos abertos onde f é monótona decrescente.
 - (c) Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(3, f(3))$.
 - (d) Mostre que a equação $f(x) = \sin(2x)$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

2. Considere a função f , definida em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2x+5}$.

- (a) Determine $A, B \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{A(2x+2)}{x^2+2x+5} + \frac{B}{x^2+2x+5}.$$

- (b) Usando a alínea anterior, encontre uma primitiva de f .

3. Considere, em $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ definidas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule $\det(\mathbf{A})$ e averigue se os vetores dados pelas colunas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes.
- (b) Classifique o sistema (escrito em forma matricial):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (c) Calcule $\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1}$.

4. Considere o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis $x, y, z \in \mathbb{R}$ e com parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \beta y + \alpha z = 1 \\ y + \alpha z = 0 \\ x + \beta y = 0 \end{cases}.$$

- (a) Classifique o sistema em função dos parâmetros α e β .
(b) Determine o conjunto solução do sistema quando $\alpha = 0$ e $\beta = 3$.

